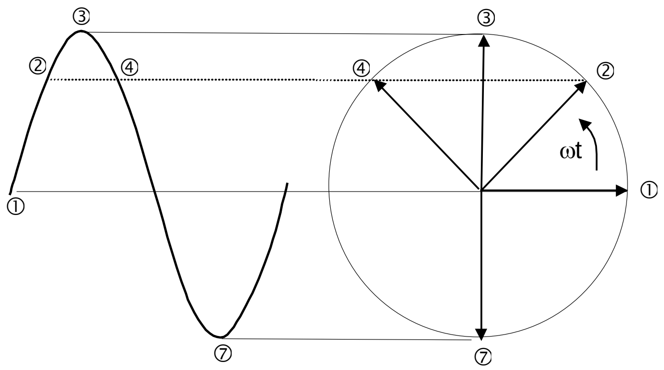
BREVE REPASO DE TEORÍA DE CIRCUITOS

CONCEPTO DE FASOR.

Las ondas senoidales pueden ser representadas mediante un vector giratorio cuya velocidad de giro viene determinada por la frecuencia de la onda que representa, de forma que este vector tarda en dar una vuelta el mismo tiempo que la onda senoidal recorre un ciclo completo (un período).
En estas condiciones, la proyección de este vector sobre el eje de ordenadas nos dará en cada momento el valor instantáneo de la onda senoidal.
Supongamos la siguiente onda senoidal:



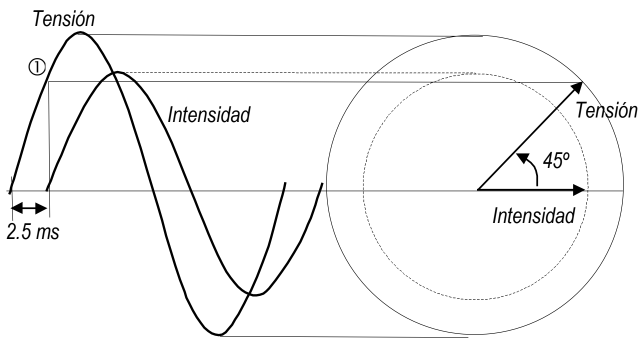
La posición del fasor vendrá dada por el instante de tiempo considerado.

Si la frecuencia es de 50 Hz, el período de la onda será $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0.02s$. Durante este tiempo, el vector gira 360º. Se puede establecer una correspondencia entre el tiempo y los grados recorridos por el vector de forma que, por ejemplo en la posición 2, en la que el vector ha girado 45º, se corresponde con el instante de tiempo correspondiente a :

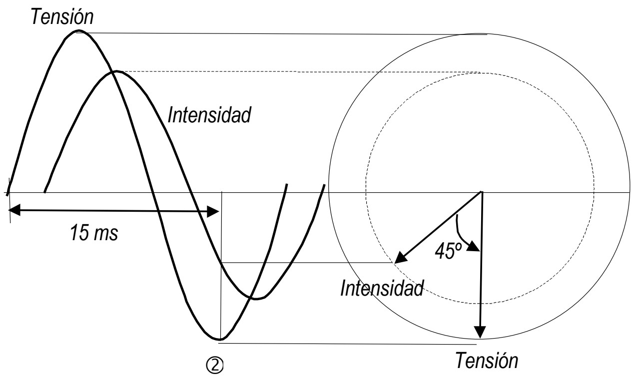
$$t = 45\frac{0.02}{360} = 0.0025s = 2.5ms\ .$$

Esto nos permite definir los desfases entre las ondas en función del ángulo que forman los vectores asociados a cada uno de ellos.

Supongamos un circuito inductivo en el que la tensión adelanta a la intensidad un ángulo de 45º. En este caso la evolución temporal de ambas ondas será:



Si representamos los vectores en el instante correspondiente a 2



La posición de los vectores define el valor de las ondas en un instante determinado y los desfases que presentan entre sí las distintas ondas.
A partir de los dos diagramas anteriores se observa que el ángulo que forman los dos vectores no depende del tiempo sino del tipo de elemento que constituye el circuito. En este caso será un circuito inductivo de impedancia: $\underline{Z} = Z\angle 45^{o}$ ⇨ las impedancias no son vectores giratorios, son números complejos, su argumento no varía con el tiempo.
En régimen estacionario senoidal, el desfase que presentan las distintas ondas entre sí no depende del instante de tiempo considerado. Esto nos permite elegir cualquiera de las ondas como referencia a la hora de realizar el diagrama.

Si dividimos el diagrama vectorial obtenido por $\sqrt{2}$, obtenemos el **diagrama fasorial** correspondiente al circuito considerado.

DIAGRAMA FASORIAL

Representación de todos los fasores implicados en el circuito eléctrico.

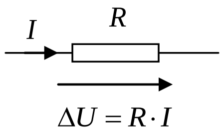
FASORES PRESENTES EN UN CIRCUITO ELÉCTRICO:
- Tensiones en todos los elementos.
- Intensidades en todas las ramas del circuito.

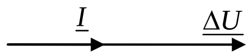
NO SON FASORES:
- Impedancias, admitancias….
- Potencia aparente . La relación entre la potencia activa y la reactiva en los elementos del circuito depende del factor de potencia que presente el elemento.

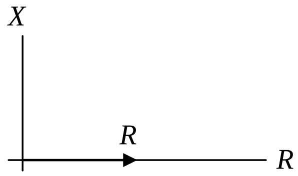
RELACIÓN ENTRE LA TENSIÓN Y LA INTENSIDAD EN LOS ELEMENTOS BÁSICOS DE LOS CIRCUITOS.

RESISTENCIA:

Modelo que permite identificar las pérdidas de potencia activa (por efecto Joule) en un circuito. El valor de dicha resistencia vendrá dado por la caída de tensión que se produce en la misma al circular por ella la intensidad. En la mayoría de los casos se supone que la caída de tensión es directamente proporcional a la intensidad y por tanto:

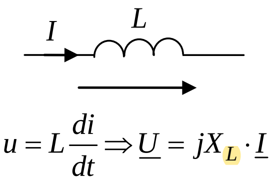


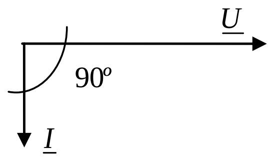


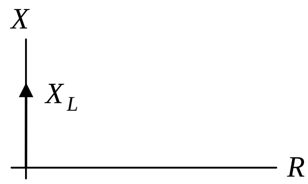


BOBINA IDEAL:

Al pasar por ella la intensidad se genera un campo magnético. Este campo magnético induce en la bobina una f.e.m. intentando “borrar” la tensión, o lo que es lo mismo oponiéndose a la causa que generó el campo magnético. El resultado es que aparece una tensión en la bobina.

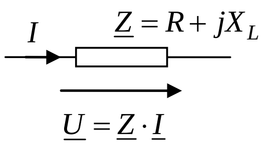


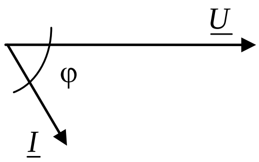


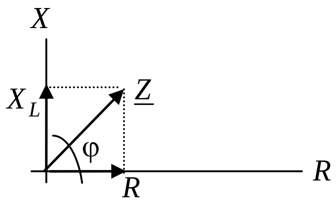


BOBINA REAL:

Las bobinas están formadas por conductores y por lo tanto tienen resistencia. Podemos modelarlas como una combinación de una resistencia y una bobina ideal, de forma que:







El ángulo ϕ depende de la característica de la bobina y es un valor fijo. La parte resistiva de la resistencia y la reactiva de la bobina también.

$\underline{Z}$ no es un fasor, el tiempo no influye en su valor. Define la relación entre la tensión y la intensidad en la bobina tanto en módulo como en el desfase que sufre la intensidad respecto a la tensión al pasar por ella.

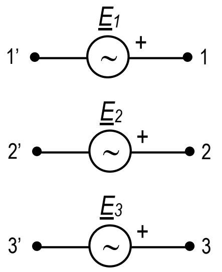
El ángulo de la tensión y la intensidad no son fijos, depende del instante en el que pintemos los fasores, pero el ángulo que forman si lo es.

Este ángulo nos va a permitir determinar la relación entre el consumo de la potencia activa (que se debe a las pérdidas por Joule en la resistencia) y en este caso al consumo de la potencia reactiva que se asocia con una potencia (reactiva) necesaria para crear el campo magnético. El sistema eléctrico tiene que poder proporcionar, esta potencia reactiva.

SISTEMAS TRIFÁSICOS

FUENTES TRIFÁSICAS

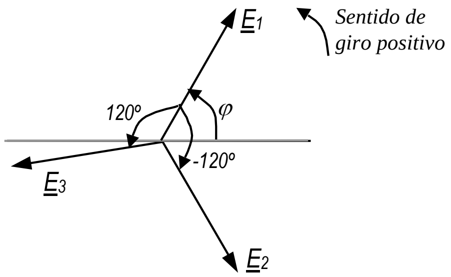
Se define un sistema n-fasico de tensiones equilibradas como aquel en el que las tensiones tienen todas el mismo módulo y presentan entre ellas el mismo desfase.
En particular, para n= 3 se definen un sistema trifásico equilibrado de la siguiente forma:



$$e_A(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \underline{E_A} = U_{ef} \underline{|0º}$$

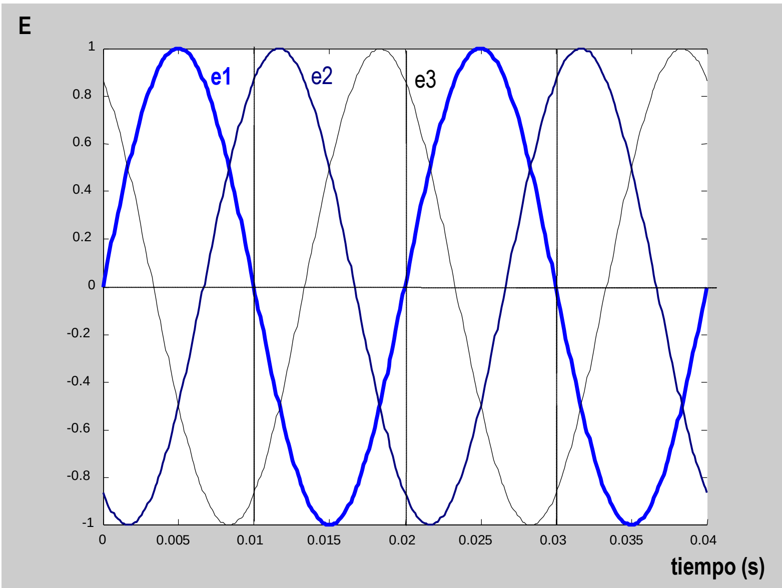
$$e_B(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \qquad \Rightarrow \underline{E_B} = U_{ef} \underline{|-120º}$$

$$e_C(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \qquad \Rightarrow \underline{E_C} = U_{ef} \underline{|+120º}$$



$$\underline{E_A} + \underline{E_B} + \underline{E_C} = 0$$

La evolución temporal de las tres ondas correspondientes a las fuentes descritas tomando como origen de fases $\underline{E_1}$ será:

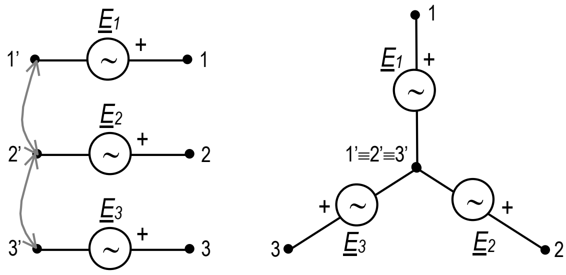


DEFINICIONES

- FASE: Cada una de las fuentes contituye una fase. Por extensión se define como fase cualquier elemento del circuito donde se genera, transporta o utiliza cualquiera de las tensiones del circuito.

CONEXIÓN EN ESTRELLA

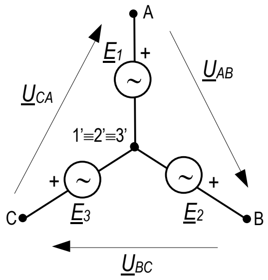
Se conectan entre sí los terminales correspondientes de las fuentes (1'-2'-3' ó 1-2-3). El punto que representa la conexión de los tres terminales se denomina NEUTRO.



En la fuente se dispondrá de tres terminales que serán siempre accesibles. El punto neutro puede o no ser accesible. Estos terminales se denotan mediante las siguientes letras:

- A, B y C: notación de uso general.
- R, S y T: notación de uso general en redes eléctricas.
- U, V y W; X, Y y Z: terminales de las máquinas eléctricas.

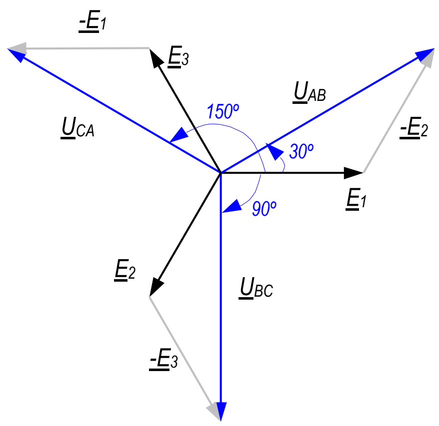
Eligiendo como origen de referencia de fases $\underline{E_1}$ las tensiones entre los terminales de las fuentes serán:



$$\underline{U_{AB}} = \underline{E_1} - \underline{E_2} = E\angle 0 - E\angle -120^{\circ} = E\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = E\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = E\sqrt{3}\angle 30^{\circ}$$

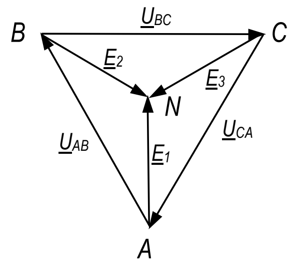
$$\underline{U_{BC}} = \underline{E_2} - \underline{E_3} = E\angle -120^{\circ} - E\angle 120^{\circ} = E\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right) = E\cdot\left(-2\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = E\sqrt{3}\angle\text{-}90^{\circ}$$

$$\underline{U_{CA}} = \underline{E_3} - \underline{E_1} = E\angle 120^{\circ} - E\angle 0^{\circ} = E\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)-1\right) = E\cdot\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = E\sqrt{3}\angle 150^{\circ}$$



Como se puede observar también son equilibradas: el mismo módulo y el mismo desfase entre ellas.

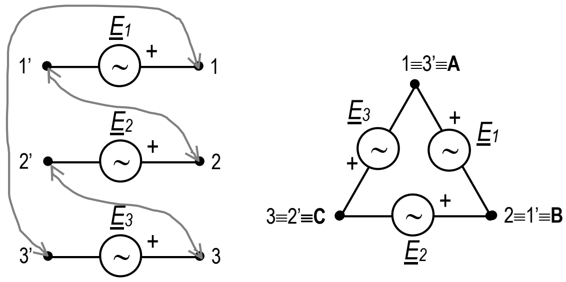
El diagrama anterior constituye la representación fasorial de los vectores correspondiente a las tensiones presentes en la fuente.
En el estudio de sistemas trifásicos se utiliza además otro tipo de representación llamada "sucesiva" .
Esta representación se realiza definiendo la posición de los puntos A, B, C y N y representando mediante flechas los fasores correspondientes a los distintos parámetros. Si el sistema es equilibrado, los puntos A, B y C se corresponden con los vértices de un triángulo equilatero, siendo el punto N el centro geométrico de los mismos.



Esta representación resulta muy util en el caso de estudio de desequilibrios como se verá más adelante.

CONEXIÓN EN TRIÁNGULO

Las tres fuentes se conectan en serie de forma que el terminal positivo de cada fuente se conecta con el negativo de la siguiente, es decir se unen los puntos con distinta polaridad.



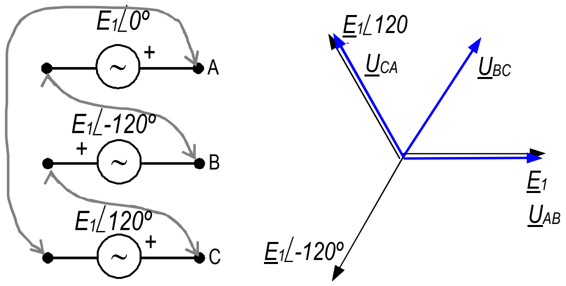
Se tendrán también tres terminales accesibles: A, B y C.

En este caso las <u>tensiones entre los terminales</u> serán i**<u>guales</u>** a las <u>tensiones en las fases</u>.

$$\underline{U_{AB}} = \underline{E_1} = E\angle\varphi$$
$$\underline{U_{BC}} = \underline{E_2} = E\angle\varphi - 120^o$$
$$\underline{U_{CA}} = \underline{E_3} = E\angle\varphi + 120^o$$

- *TENSION DE FASE: la tensión que aparece en cada una de las fases del circuito*
- *TENSION COMPUESTA: tensión entre dos terminales, en este caso, de la fuente.*

Para que la fuente sea trifásica equilibrada, la tensión entre sus teminales tiene que ser trifásica equilibrada. En el ejemplo de la figura tenemos tres fuentes de tensión del mismo módulo y desfasadas 120º que no forman una fuente de alimentación trifásica equilibrada.



SECUENCIA DE FASES

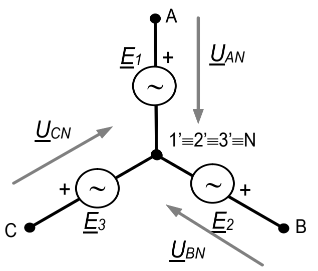
A la hora de conectar las tres fuentes al resto del circuito podemos realizar la conexión de dos formas diferentes, siendo los dos sistemas obtenidos equilibrados.

Si los máximos de las tensiones de fase se producen en la siguiente secuencia $A \rightarrow B \rightarrow C$, el sistema se dice que es de secuencia directa.

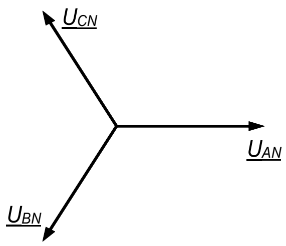
Si la secuencia es: $A \rightarrow C \rightarrow B$, estaremos ante un sistema de secuencia inversa.

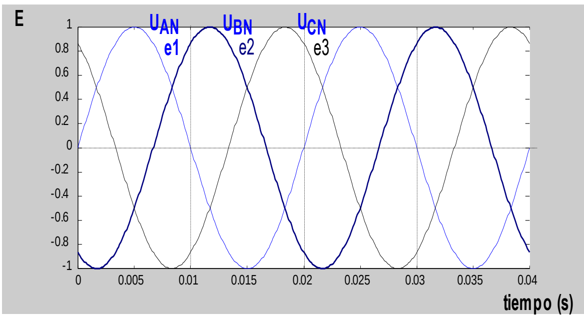
Vamos a ver un ejemplo basándonos en la conexión en estrella.

SECUENCIA DIRECTA:

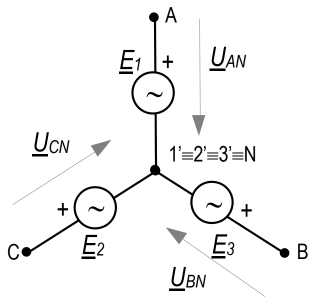


$$\begin{array}{ll} \underline{E}_1 = E\angle\varphi & U_{AN} = E\angle\varphi \\ \underline{E}_2 = E\angle\varphi - 120^{\circ} \Rightarrow & U_{BN} = E\angle\varphi - 120^{\circ} \\ \underline{E}_3 = E\angle\varphi + 120^{\circ} & U_{CN} = E\angle\varphi + 120^{\circ} \end{array}$$

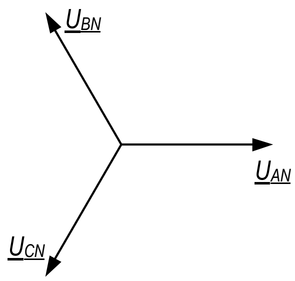


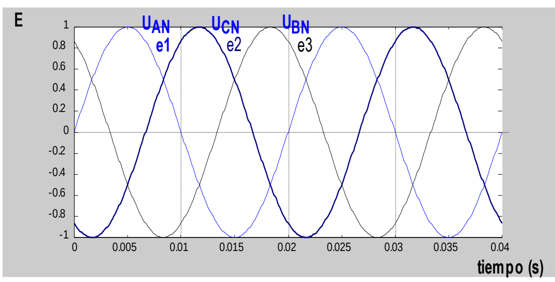


SECUENCIA INVERSA



$$\begin{array}{ll} \underline{E}_1 = E\angle\varphi & U_{A} = E\angle\varphi \\ \underline{E}_2 = E\angle\varphi - 120^{\circ} \Rightarrow & U_{C} = E\angle\varphi - 120^{\circ} \\ \underline{E}_3 = E\angle\varphi + 120^{\circ} & U_{B} = E\angle\varphi + 120^{\circ} \end{array}$$

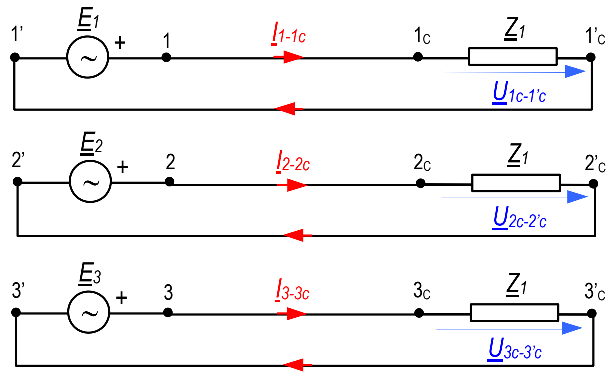




LINEAS TRIFÁSICAS

Supongamos que queremos alimentar tres cargas iguales, cuyas impedancias equivalentes son $\underline{Z}_1$.

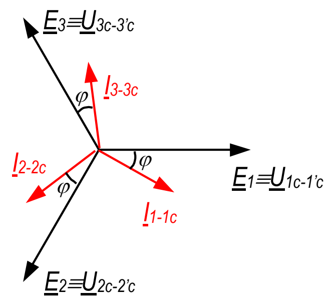
Podríamos alimentar cada una de ellas a partir de una de las fuentes anteriores de forma que tendríamos los siguientes circuitos:



Para conectar las fuentes a las cargas necesitaremos 6 conductores tal como se ve en la figura.

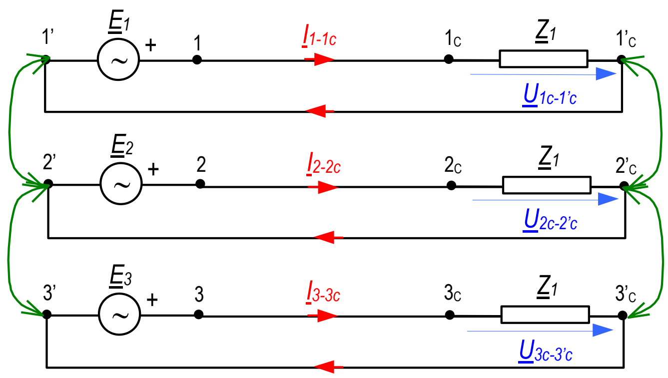
Al ser el módulo de las tres fuentes iguales y las tres impedancias iguales, el módulo de la intensidad en los tres circuitos será el mismo. De la misma forma los desfases entre las tres intensidades también serán iguales.

Si representamos en el mismo diagrama los fasores correspondientes a los tres circuitos, suponiendo la carga inductiva $\underline{Z}_1 = Z_1\angle\varphi$ *y eligiendo como referencia* $\underline{E}_1$ *sería:*

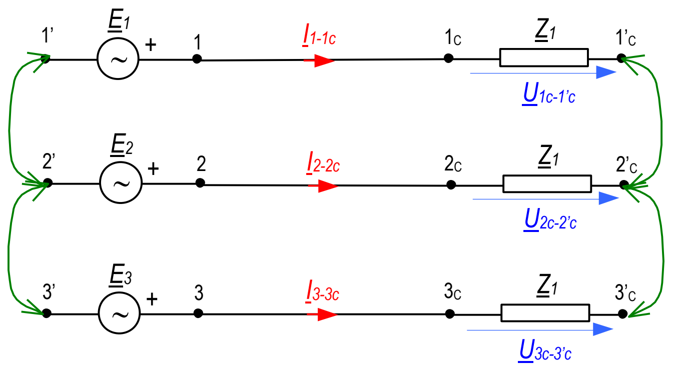


Estaremos por tanto ante un sistema equilibrado de intensidades en el que se cumple que la suma de las mismas es cero.

Si conectamos entre ellos los puntos 1',2' y 3' y 1'c, 2'c y 3'c, no varía ni la tensión ni la intensidad en ningún elemento del circuito. Este circuito será por tanto equivalente al anterior.



En este caso, la intensidad que circula por el conductor 1'c-1' será nula, ya que la suma de las tres intensidades es cero. Lo mismo sucede en los conductores 2'c-2' y 3'c-3'. Por lo tanto, eliminando estos conductores obtendremos un nuevo circuito equivalente:



Hemos obtenido un circuito que nos permite con sólo tres conductores transportar la misma potencia desde la fuente a la carga.

- *LINEA TRIFÁSICA: conexión entre los terminales accesibles de la fuente y la carga.*
- *INTENSIDAD DE LINEA: intensidad que circula por cada uno de las fases de una línea trifásica.*

Normalmente los elementos trifásicos disponen de tres bornas en las que se conectarán los tres conductores que contituyen la línea de alimentación, y no se dispondrá de información respecto a como está conectada internamente. En la línea por lo tanto, la única tensión que podremos medir será la que existe entre dos fases, que se corresponderá con la tensión definida anteriormente como compuesta.

- *TENSIÓN DE LINEA: tensión entre dos terminales de la línea trifásica.*

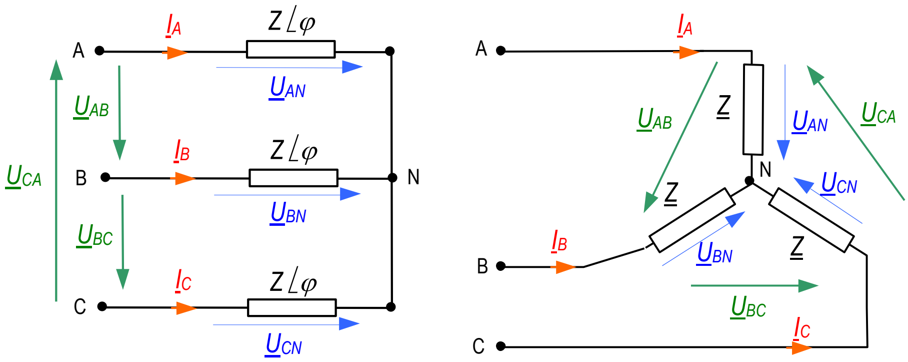
En el ejemplo descrito se ha conectado tanto la fuente como la carga en estrella. Se puede hacer un razonamiento similar conectando la fuente, la carga o ambos en triángulo.

En cualquier caso, tanto la fuente como la carga tienen que ser equilibradas, es decir, las tres fases tienen que ser equivalentes.

CARGAS TRIFÁSICAS

Las tres impedancias que forman la carga trifásica pueden conectarse en estrella o en triángulo igual que se hace con las fuentes.

CONEXIÓN EN ESTRELLA

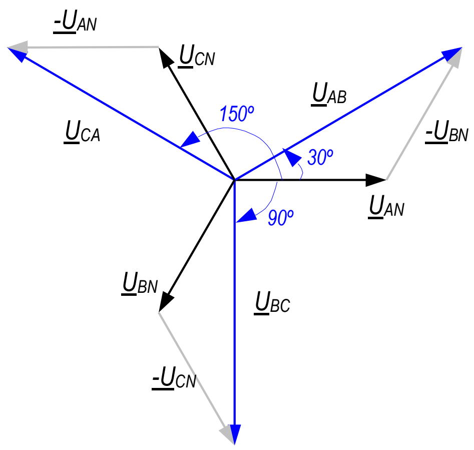


A la vista de la figura se observa:
La intensidad que circula por cada una de las cargas es la intensidad de línea

$$\boxed{\underline{I}_{FASE} = \underline{I}_{LINEA}}$$

La tensión a la que está sometida cada carga no es la de línea. Si el sistema de alimentación es trifásico equilibrado, las tensiones de fase en la carga también lo serán, mientras que las tres cargas sean exactamente iguales. Tendremos por tanto:

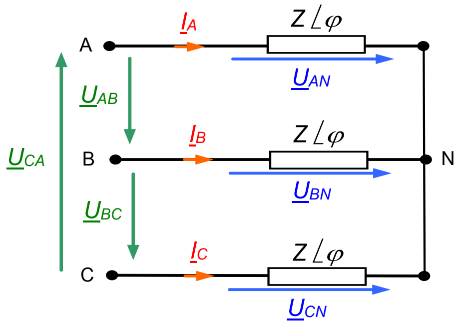
$$\left.\begin{array}{l}\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B\\ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C\\ \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}\underline{U}_A = \dfrac{(\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CA})}{3}\\ \underline{U}_B = \dfrac{(\underline{U}_{BC} - \underline{U}_{AB})}{3}\\ \underline{U}_C = \dfrac{(\underline{U}_{CA} - \underline{U}_{BC})}{3}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\underline{U}_A = \dfrac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}}\angle -30^o\\ \underline{U}_B = \dfrac{\underline{U}_{BC}}{\sqrt{3}}\angle -30^o\\ \underline{U}_C = \dfrac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3}}\angle -30^o\end{array} \Rightarrow \boxed{\underline{U}_{FASE} = \dfrac{\underline{U}_{LINEA}}{\sqrt{3}}\angle -30^o}$$



NOTA: En un sistema trifásico supondremos siempre que el sistema de alimentación es trifásico equilibrado. En la práctica, se genera a partir de máquinas síncronas que proporcionan un sistema de tensiones perfectamente equilibrado.

El terminal neutro de la carga no siempre será accesible, mientras que los terminales A, B y C tienen que serlo para poder conectarla al resto del circuito. De esta forma siempre podremos medir la tensión de *linea y la intensidad de línea. Por este motivo, cuando se referencia una carga trifásica siempre se hace referencia a la tensión nominal de línea y a la intensidad nominal de línea. A partir de estos valores podremos determinar sin problemas los valores de fase.*

Ejemplo:
Se dispone de una carga trifásica de Un = 380 V e In = 4 A. Determinar la máxima tensión que no se debe superar en cada fase de la carga.



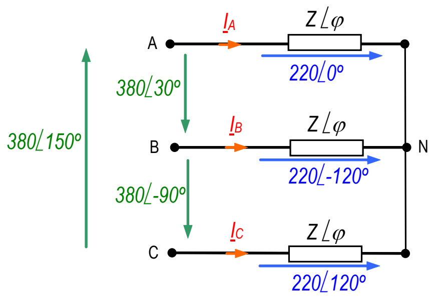
Si la tensión máxima en la línea es de 380 V, la tensión en cada fase, vendrá dada por :

$$\underline{U}_{FASE} = \frac{\underline{U}_{LINEA}}{\sqrt{3}} \angle -30^{\circ}$$

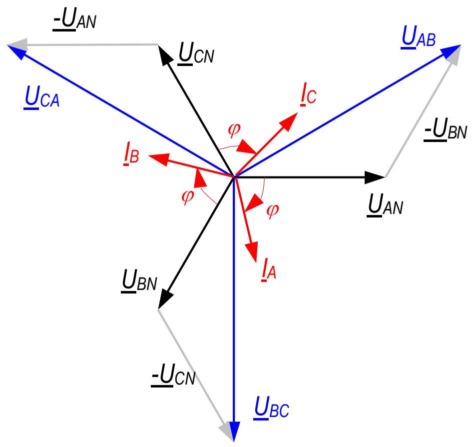
siendo su módulo por tanto

$$U_{FASE} = \frac{U_{LINEA}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220V$$

En la figura se han representado en el circuito las tensiones correspondientes a las fases y a las líneas tomando como origen de fasores la tensión en la fase A.



Supongamos que la carga es inductiva. Realizaremos el diagrama fasorial en este caso.



Si el desfase de la impedancia de cada fase es φ, la tensión y la intensidad en cada fase estarán desfasadas ese ángulo. Ahora bien, podemos observar en la figura que el desfase entre la tensión de línea y la intensidad de línea no se corresponde con este valor.

Se define el factor de potencia de una carga trifásica como el factor de potencia que presenta cada una de las fases.

La potencia consumida en la carga vendrá dada por la suma de las potencias consumidas en cada una de las fases.
Por tanto:

$$P_{FASE} = U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \cos\varphi = \frac{U_{LINEA}}{\sqrt{3}} I_{LINEA} \cdot \cos\varphi$$

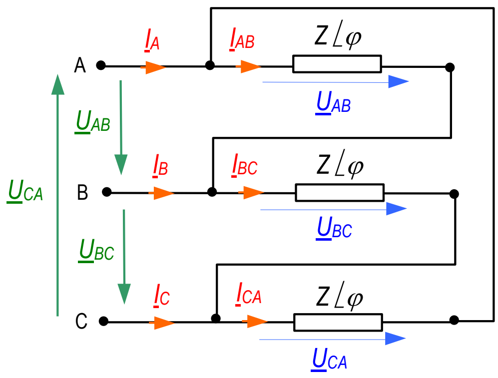
$$Q_{FASE} = U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \sin\varphi = \frac{U_{LINEA}}{\sqrt{3}} I_{LINEA} \cdot \sin\varphi$$

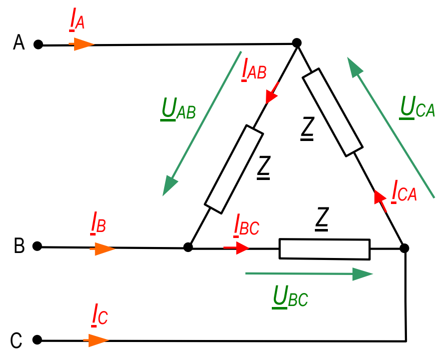
$$P_{TRIFÁSICA} = 3 \cdot P_{FASE} = 3 \cdot U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \frac{U_{LINEA}}{\sqrt{3}} I_{LINEA} \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \cdot \cos\varphi$$

$$Q_{TRIFÁSICA} = 3 \cdot P_{FASE} = 3 \cdot U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \sin\varphi = 3 \cdot \frac{U_{LINEA}}{\sqrt{3}} I_{LINEA} \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{S_{TRIFÁSICA}} = P_{TRIFÁSICA} + Q_{TRIFÁSICA} \cdot j = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \angle\varphi$$

CONEXIÓN EN TRIÁNGULO

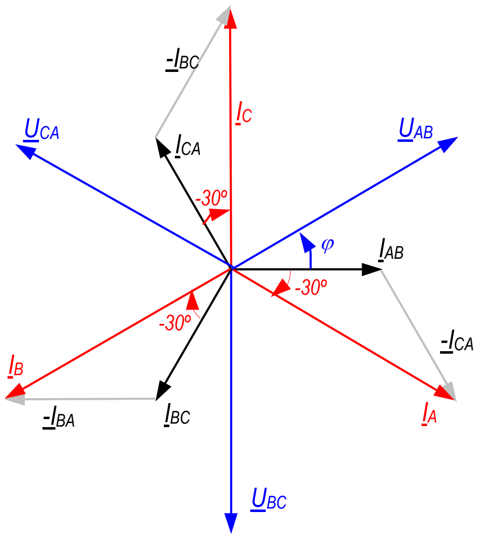




La tensión en cada fase es igual a la tensión de línea. $\boxed{U_{FASE} = U_{LINEA}}$

La intensidad de fase no es la misma que la de la línea. Si la fuente es trifásica equilibrada y la impedancia de las tres fases es la misma, las intensidades también serán equilibradas. La relación entre las intensidades y de fase y de línea se pueden determinar a partir de:

$$\begin{matrix} \underline{I_A} = \underline{I_{AB}} - \underline{I_{CA}} \\ \underline{I_B} = \underline{I_{BC}} - \underline{I_{CA}} \\ \underline{I_C} = \underline{I_{CA}} - \underline{I_{BC}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{I_{AB}} = \dfrac{(\underline{I_A} - \underline{I_B})}{3} \\ \underline{I_{BC}} = \dfrac{(\underline{I_B} - \underline{I_C})}{3} \\ \underline{I_{CA}} = \dfrac{(\underline{I_C} - \underline{I_A})}{3} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{I_{AB}} = \dfrac{\underline{I_A}}{\sqrt{3}} \angle 30^o \\ \underline{I_{BC}} = \dfrac{\underline{I_B}}{\sqrt{3}} \angle 30^o \\ \underline{I_{CA}} = \dfrac{\underline{I_C}}{\sqrt{3}} \angle 30^o \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\underline{I_{FASE}} = \frac{\underline{I_{LINEA}}}{\sqrt{3}} \angle 30^o}$$



El factor de potencia se definirá como el coseno del ángulo que forman la tensión de fase y la intensidad de fase. Se observa que sigue sin ser igual al desfase que presentan la tensión y la intensidad de línea.

La potencia consumida por el circuito vendrá dada por:

$$P_{TRIFÁSICA} = 3 \cdot P_{FASE} = 3 \cdot U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \cos\varphi = 3 \cdot U_{LINEA} \frac{I_{LINEA}}{\sqrt{3}} \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \cdot \cos\varphi$$

$$Q_{TRIFÁSICA} = 3 \cdot P_{FASE} = 3 \cdot U_{FASE} \cdot I_{FASE} \cdot \sin\varphi = 3 \cdot U_{LINEA} \frac{I_{LINEA}}{\sqrt{3}} \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{S}_{TRIFÁSICA} = P_{TRIFÁSICA} + Q_{TRIFÁSICA} \cdot j = \sqrt{3} \cdot U_{LINEA} \cdot I_{LINEA} \angle \varphi$$

Hemos supuesto en ambas conexiones que el sistema es de secuencia directa. Se puede deducir que todos los valores eléctricos son de secuencia directa. De la misma forma si el sistema fuera de secuencia inversa, todos los valores serían de secuencia inversa.

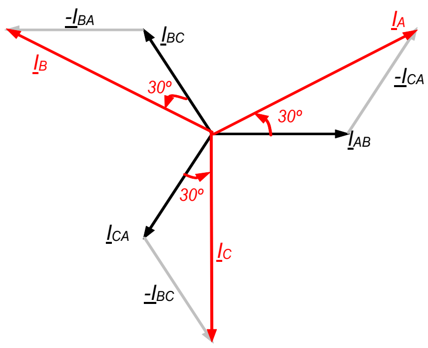
Ejemplo:

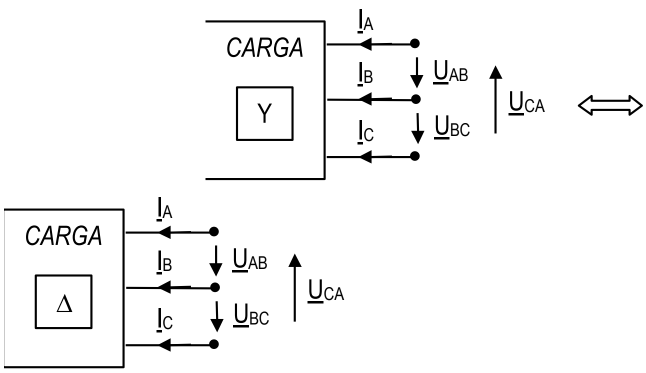
Determinar la relación entre las intensidades de línea y de fase en una carga alimentada por una fuente de tensión trifásica equilibrada de secuencia inversa.

SECUENCIA INVERSA: $\boxed{\underline{I}_{FASE} = \frac{\underline{I}_{LINEA}}{\sqrt{3}} \angle -30^{o}}$

CIRCUITOS EQUIVALENTES EN ESTRELLA Y EN TRIÁNGULO

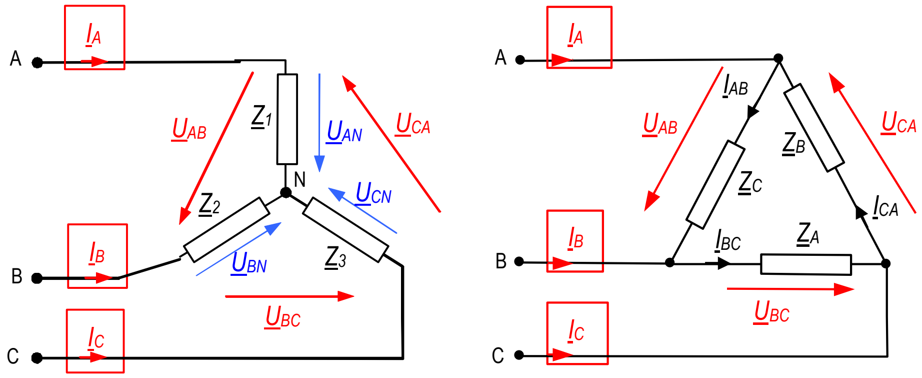
A partir de un circuito conectado en estrella podemos determinar un circuito equivalente conectado en triángulo.
Por circuito equivalente entendemos un circuito que se comporta exactamente igual que el circuito original, es decir, en bornas del elemento tenemos los mismos valores de tensión e intensidad, tanto en módulos como en desfases que el circuito original.





CARGAS TRIFÁSICAS

Según el teorema de Rosen:



$$Y \rightarrow \Delta \Rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_A = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 \cdot \left(\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} \right) \\ \underline{Z}_B = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 \cdot \left(\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} \right) \\ \underline{Z}_C = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \left(\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} \right) \end{cases}$$

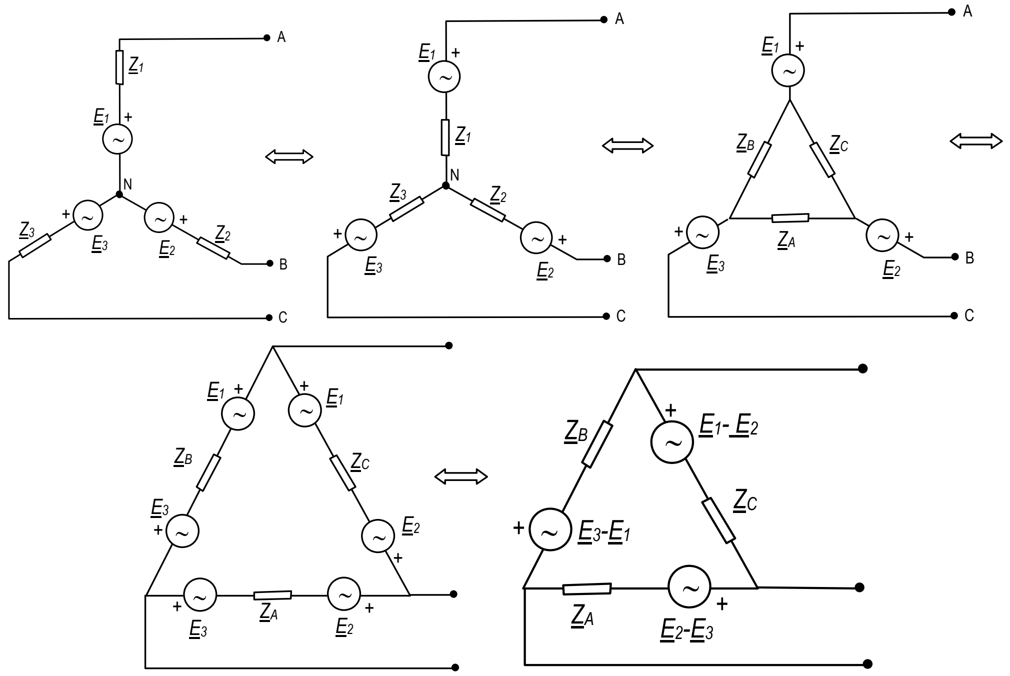
$$\Delta \rightarrow Y \Rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_1 = \dfrac{\underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_B}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \\ \underline{Z}_2 = \dfrac{\underline{Z}_A \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \\ \underline{Z}_3 = \dfrac{\underline{Z}_A \cdot \underline{Z}_B}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \end{cases}$$

Si la carga es equilibrada: $\boxed{\underline{Z}_\Delta = 3 \cdot \underline{Z}_Y}$

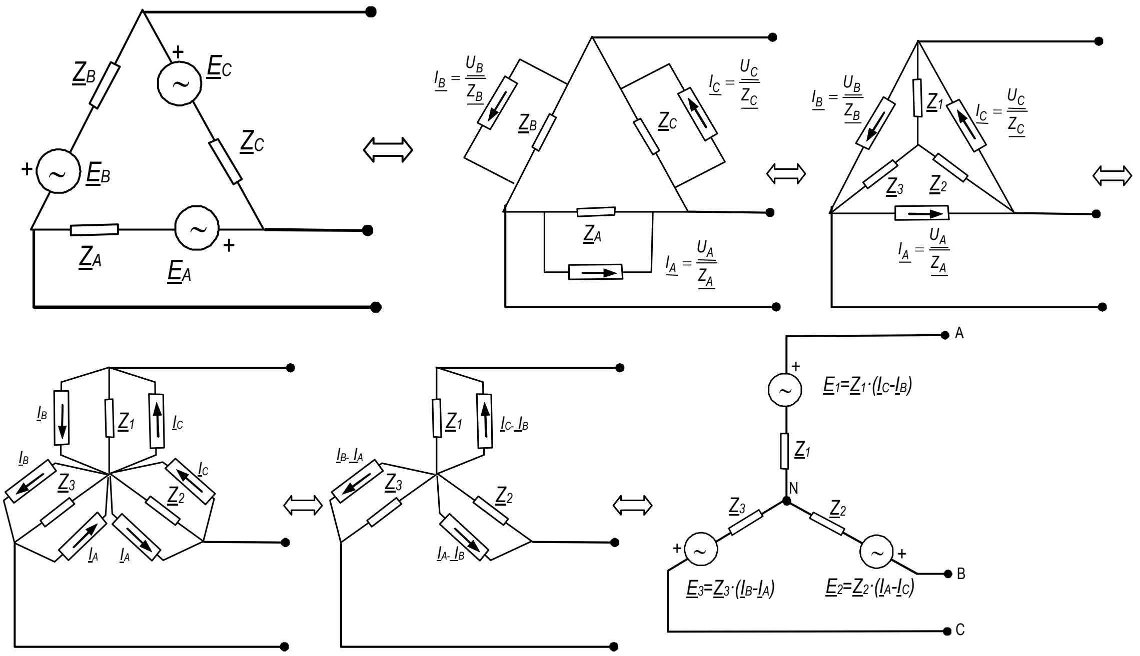
Regla memotécnica: en triángulo la tensión en las fases es mayor (tensión de línea) y la intensidad menor (intensidad de fase), y por lo tanto, la impedancia = U/I será mayor.

FUENTES REALES

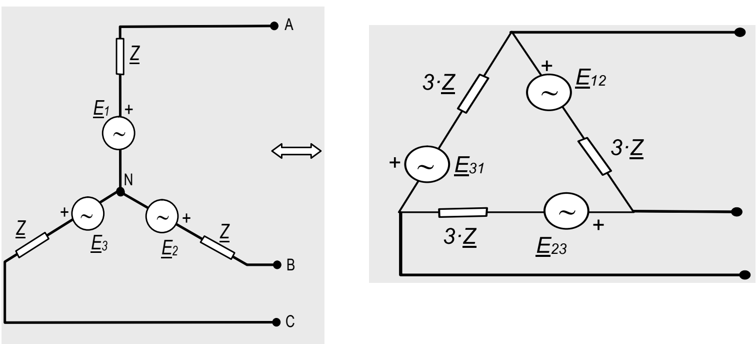
EQUIVALENTE EN TRIÁNGULO DE UNA FUENTE DESQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA.



EQUIVALENTE EN ESTRELLA DE UNA FUENTE CONECTADA EN TRIÁNGULO



En el caso de que la fuente sea equilibrada:



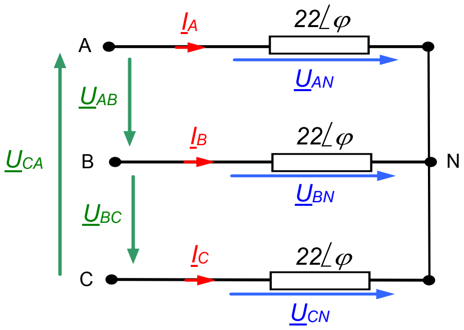
$$\underline{E}_{12} = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_1 \angle 30^o$$
$$\underline{E}_{23} = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_2 \angle 30^o$$
$$\underline{E}_{31} = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_3 \angle 30^o$$

La transformación definida es reversible, es decir permite pasar tanto de triángulo a estrella como de estrella a triángulo.

ATENCIÓN: NO SE PUEDE CONFUNDIR EL EQUIVALENTE DE UNA CONEXIÓN EN ESTRELLA O EN TRIÁNGULO CON LA CONEXIÓN REAL EN ESTRELLA O TRIÁNGULO.

Ejemplo.
Se dispone de una carga trifásica equilibrada de 22 ohmios, factor de potencia 0.8 inductivo. Dicha carga se alimenta a partir de una fuente de 380 V trifásica equilibrada. Determinar la intensidad de línea suponiendo la carga conectada en estrella y en triángulo.

Conexión en estrella:

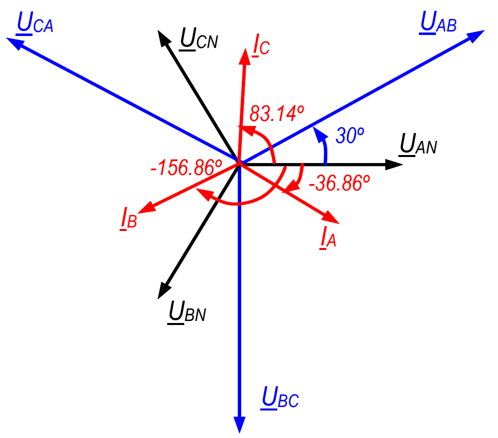


Cogemos como origen de los fasores la tensión en la fase A. Por lo tanto

$$\underline{U}_{AN} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}}\angle 0^{\circ} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^{\circ} = 220\angle 0^{\circ}$$

$$\underline{U}_{BN} = 220\angle -120^{\circ}$$

$$\underline{U}_{CN} = 220\angle 120^{\circ}$$



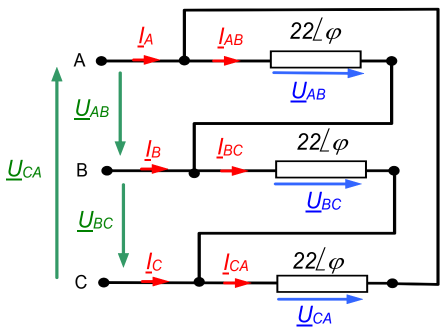
$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{An}}{\underline{Z}} = \frac{220\angle 0^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\angle -36.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BN}}{\underline{Z}} = \frac{220\angle -120^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\angle -156.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CN}}{\underline{Z}} = \frac{220\angle 120^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\angle 83.14^{\circ}$$

La intensidad de línea = 10 A

Conectada en triángulo las intensidades en cada fase serán:



$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{380\angle 30^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\sqrt{3}\angle -6.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \frac{380\angle -90^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\sqrt{3}\angle -126.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \frac{380\angle 150^{\circ}}{22\angle 36.86^{\circ}} = 10\sqrt{3}\angle 113.14^{\circ}$$

La intensidad de línea será por tanto:

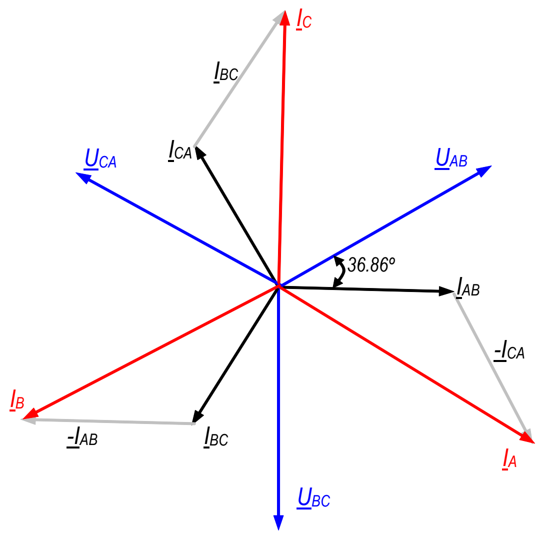
$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} \cdot \sqrt{3}\angle -30^{\circ} = 10\sqrt{3}\sqrt{3}\angle -6.86^{\circ} - 30^{\circ} = 30\angle -36.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} \cdot \sqrt{3}\angle -30^{\circ} = 10\sqrt{3}\sqrt{3}\angle -126.86^{\circ} - 30^{\circ} = 30\angle -156.86^{\circ}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} \cdot \sqrt{3}\angle -30^{\circ} = 10\sqrt{3}\sqrt{3}\angle 113.14^{\circ} - 30^{\circ} = 30\angle 83.14^{\circ}$$

$\Rightarrow$ *La intensidad de línea en este caso es 30 A*

La intensidad que consume la carga no depende únicamente de la impedancia de la carga. Influye también como esté conectada internamente dicha carga.

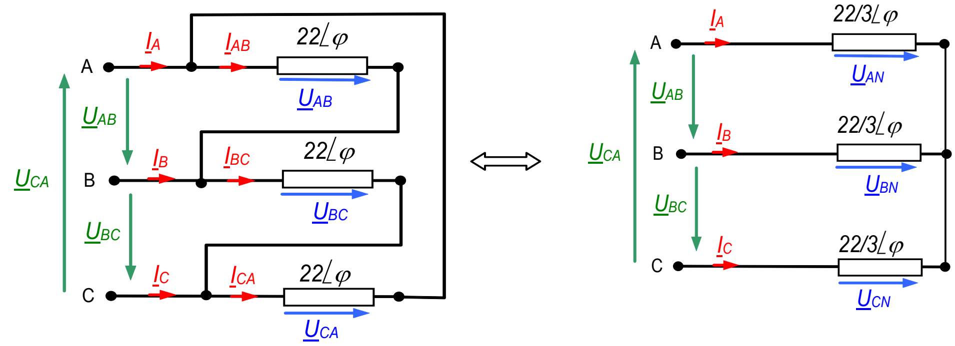


La intensidad de línea de una carga conectada en estrella es tres veces menor que la intensidad de línea si estuviera conectada en triángulo SIEMPRE QUE LA TENSIÓN DE ALIMENTACIÓN A LA CARGA SEA LA MISMA.

Los dos circuitos anteriores NO SON EQUIVALENTES, la intensidad que consumen no es la misma.

Determinar el equivalente en estrella de la carga trifásica conectada en triángulo definida anteriormente.

Tal como hemos visto, el circuito equivalente se obtiene dividiendo el módulo de las impedancias por tres manteniendo el ángulo de las mismas.



El circuito en estrella obtenido se comporta exactamente igual que el original frente al resto del circuito. Si calculamos las intensidades de línea obtenemos:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AN}}{\underline{Z}_{equiv}} = \frac{\frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle \varphi} = \frac{\frac{380\angle 30^o}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle 36.86^o} = 30\angle -36.86^o$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BN}}{\underline{Z}_{equiv}} = \frac{\frac{\underline{U}_{BC}}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle \varphi} = \frac{\frac{380\angle -90^o}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle 36.86^o} = 30\angle -156.86^o$$

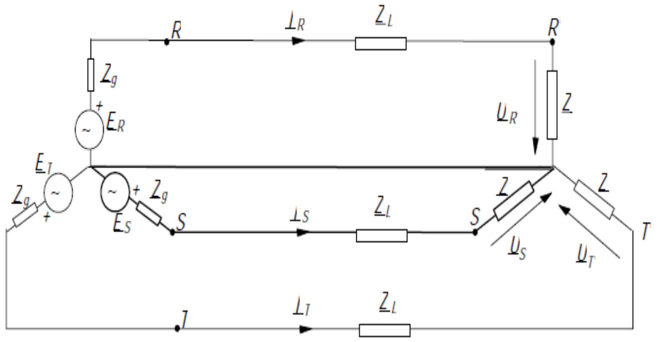
$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CN}}{\underline{Z}_{equiv}} = \frac{\frac{\underline{U}_{CA}}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle \varphi} = \frac{\frac{380\angle 150^o}{\sqrt{3}}\angle -30^o}{\frac{22}{3}\angle 36.86^o} = 30\angle 83.14^o$$

que como se observa no coinciden con las obtenidas en el circuito original.

ANALISIS DE CIRCUITOS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS.
REDUCCIÓN A UN CIRCUITO MONOFÁSICO.

CONEXIÓN ESTRELLA – ESTRELLA

Disponemos de una alimentación trifásica conectada en estrella a partir de la cual alimentamos a través de una línea trifásica una carga equilibrada conectada también en estrella. En la línea se producirá una caída de tensión (los conductores son reales y presentan impedancia $\underline{Z}_L$). Así mismo disponemos de un conductor que une los dos neutros de la instalación. Si el circuito está perfectamente equilibrado la intensidad que circula por dicho conductor será nula.



$\underline{Z}_g$:impedancia interna del generador

$\underline{Z}_L$:impedancia de la línea trifásica

$\underline{Z}$:impedancia por fase de la carga

$\underline{Z}_N$:impedancia del conductor neutro

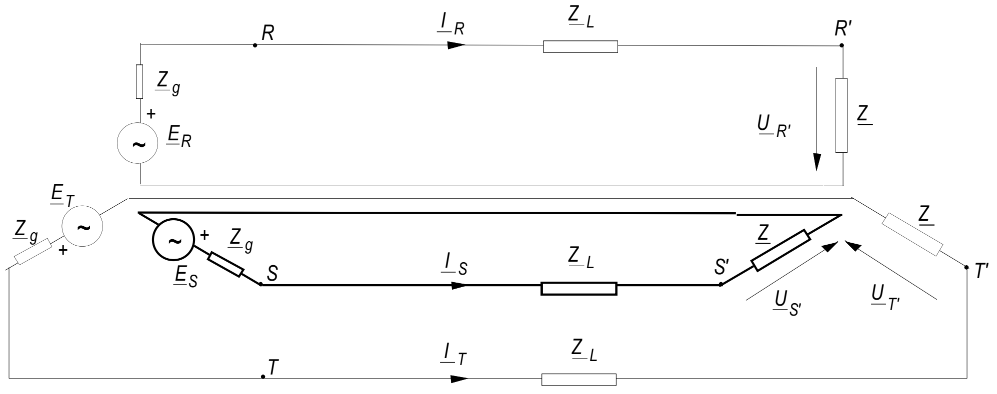
Analizando el circuito por mallas:

$$\underline{E}_R = \underline{I}_R \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right) + \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N$$
$$\underline{E}_S = \underline{I}_S \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right) + \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N$$
$$\underline{E}_T = \underline{I}_T \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right) + \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N$$

Como el circuito está equilibrado $\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0$, y por lo tanto:

$$\underline{E}_R = \underline{I}_R \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right)$$
$$\underline{E}_S = \underline{I}_S \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right)$$
$$\underline{E}_T = \underline{I}_T \cdot \left(\underline{Z}_g + \underline{Z}_L + \underline{Z}\right)$$

Estudiar este circuito será equivalente a estudiar los tres circuitos monofásicos siguientes:



Por lo tanto podemos estudiar cada una de las fases por separado como TRES CIRCUITOS MONOFÁSICOS EQUIVALENTES.

Estos tres circuitos presentan la misma impedancia, el módulo de la alimentación es el mismo en los tres casos, difiriendo únicamente en el desfase considerado en la fuente de alimentación. Las tres intensidades que aparecerán en ellos serán por tanto iguales en módulo y estarán desfasadas lo mismo que las fuentes es decir 120º. Por lo tanto a partir de la determinación de uno de los tres circuitos, podemos determinar la intensidad en los otros dos teniendo en cuenta los desfases adicionales.

$$\underline{I_R} = \frac{\underline{E_R}}{\underline{Z_g} + \underline{Z_L} + \underline{Z}} = \frac{\underline{E_R}}{\underline{Z_{Total}}}$$
$$\underline{I_S} = \frac{\underline{E_S}}{\underline{Z_{Total}}} = \frac{\underline{E_R}\angle -120^o}{\underline{Z_{Total}}} = \underline{I_R}\angle -120^o$$
$$\underline{I_T} = \frac{\underline{E_T}}{\underline{Z_{Total}}} = \frac{\underline{E_R}\angle 120^o}{\underline{Z_{Total}}} = \underline{I_R}\angle 120^o$$

Por lo tanto, analizando únicamente uno de los circuitos podemos determinar fácilmente la intensidad que circula por los otros dos.

En cuanto a la potencia, al ser tres circuitos equivalentes, determinando las potencias generadas o consumidas en uno de ellos podemos determinar las potencias trifásicas simplemente multiplicando los resultados obtenidos por tres. Por ejemplo, para calcular la potencia activa consumida en la carga:

$$\left.\begin{array}{r} P_R = U_R \cdot I_R \cdot cos\varphi \\ P_S = U_S \cdot I_S \cdot cos\varphi = U_R \cdot I_R \cdot cos\varphi = P_R \\ P_T = U_T \cdot I_T \cdot cos\varphi = U_T \cdot I_T \cdot cos\varphi = P_R \end{array}\right\} \longrightarrow P_{trifásica} = 3 \cdot P_R = 3 \cdot P_{monofásica}$$

Los valores correspondientes a las tensiones de línea, se determinan a partir de los valores de fase obtenidos considerando el circuito original, es decir deshaciendo los cambios realizados para obtener el equivalente.